

Задаци - шеста недеља

задаци са * су посебно важни

1. Доказати да за $a, b > 0, p, q \in \mathbb{Q}$ важи:

(а) $a < b \Rightarrow a^p < b^p$

(б) $a > 1 \wedge q < p \Rightarrow a^q < a^p$

(в) $a < 1 \wedge q < p \Rightarrow a^q > a^p$.

2. Доказати да је ротација за $\eta \in S^1$, то јест, $r_\eta : S^1 \rightarrow S^1, z \rightarrow \eta \cdot z$ изометрија. Закључити да r_η чува дужине лукова.

3. * Доказати Моаврову формулу: $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

4. Користећи Моаврову формулу доказати:

$$\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

5. Израчунати $(1 + i)^{20}$.

6. Доказати да Хевисајдова функција $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

има прекид у $x = 0$ и да је непрекидна у осталим тачкама.